Lernzettel

Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie von Stabtragwerken

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Baustatik I
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Lernzettel: Baustatik I – Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie von Stabtragwerken

(1) Geometrische Eigenschaften. Stabtragwerke bestehen aus Stäben, die über Knoten verbunden sind. Die Geometrie wird durch die Knotenkoordinaten (x_k, y_k) beschrieben. Die i-te Stabverbindung verläuft von Knoten k(i) zu Knoten j(i). Die Länge eines Stabes ist

$$l_i = \sqrt{(x_{j(i)} - x_{k(i)})^2 + (y_{j(i)} - y_{k(i)})^2}.$$

Der Orientierungseinheitsvektor des Stabes lautet

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\big(x_{j(i)} - x_{k(i)},\, y_{j(i)} - y_{k(i)}\big)}{l_i}.$$

Der Stab trägt in der Regel eine axiale Kraft N_i; Biege- oder Querkräfte werden bei Stabtragwerken meist vernachlässigt, sofern es sich um eine rein schubarme Stabrumpfstruktur handelt. Die Geometrie einer Tragstruktur wird oft durch das Netzt der Knoten und Stäbe beschrieben.

(2) Lagerungen. In planaren Stabtragwerken treten vor allem folgende Lagerarten auf:

- Gelenk-Lager (Pin): zwei Reaktionsgrößen R_x und R_y.
- Rollen-Lager: eine Reaktionsgröße R in der senkrechten Richtung zur Rollbahn.
- Fest-Lager (in 2D-Modellen oft als zusammengesetztes Lager betrachtet): Reaktionsgrößen R_x, R_y und ggf. ein Momentenanteil, je nach Modell.

Fensterebene der Lagerung bestimmt die Anzahl der Unbekannten und damit die Lösbarkeit des statischen Problems.

(3) Stabgeometrie. Ein Stab i verbindet zwei Knoten $(x_{k(i)}, y_{k(i)})$ und $(x_{j(i)}, y_{j(i)})$. Folgender Stabvektor wird gebildet:

$$\mathbf{l}_i = \big(x_{j(i)} - x_{k(i)},\, y_{j(i)} - y_{k(i)}\big).$$

Seine Länge ist $l_i = \|\mathbf{l}_i\| = \sqrt{(x_{j(i)} - x_{k(i)})^2 + (y_{j(i)} - y_{k(i)})^2}$. Der Einheitsvektor des Stabes:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{l}_i}{l_i}.$$

Der Stab wirkt axial mit der Kraft N_i entlang $\hat{\mathbf{e}}_i$.

(4) Grundgleichungen der Theorie I. Ordnung. Für jeden Knoten k gilt das Flächen- oder Knoten-Gleichgewicht. Unter der Annahme rein axial wirkender Stäbe ergeben sich die Gleichungen:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(k)} N_i \cos\alpha_i^{(k)} + R_x^{(k)} = 0, \qquad \sum_{i \in \mathcal{N}(k)} N_i \sin\alpha_i^{(k)} + R_y^{(k)} = 0,$$

wobei $\mathcal{N}(k)$ die Menge der Stäbe ist, die an Knoten k angrenzen, und $\alpha_i^{(k)}$ der Winkel des Stabes i relativ zur x-Achse am Knoten k ist. In starren Stabnetzen ohne Biege- oder Schubanteile liefern diese Gleichungen die Abhängigkeiten der unbekannten Axialkräfte N_i sowie der Lagerreaktionen $R_x^{(k)}, R_y^{(k)}$.

(5) Aufbauprinzip. Zerlegung des Tragwerks in überschaubare Teilmodelle:

- Gliederung in Teiltrassen oder Teilnetze.
- Gleichungen für Unbekannte aus Teilmodellen aufbauen.
- Konsistenz der Randbedingungen sicherstellen.

Ziel ist die Lösung der statisch bestimmten bzw. bestimmt unbestimmten Probleme durch sukzessives Aufbauen.

(6) Schnittprinzip. Durch Schnitte wird das Tragwerk in zwei Teilbereiche geteilt. An der Schnittstelle gelten passende Gleichgewichte. Die Summe der Kräfte an der Schnittebene muss Null ergeben, wodurch sich neue Gleichungen zur Bestimmung von Schnittgrößen ergeben.

(7) Arbeitsprinzipien der Mechanik.

- Aufbauprinzip (Knoten- bzw. Stab-Gleichgewichte).
- Schnittprinzip (Schnittgrößen an Schnitten).
- Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen an Knoten und Schnitten.

(8) Prinzip der virtuellen Weggrößen. Damit lassen sich Verschiebungen und Verformungen über virtuelle Verschiebungen ableiten. Für eine zulässige virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ gilt das virtuelle Work-Gesetz:

$$\delta W = \sum_i N_i\,\delta l_i + \sum_k \mathbf{R}^{(k)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(k)} = 0.$$

Dabei bezeichnet δl_i die Änderung der Stablängen aufgrund der virtuellen Verschiebung und $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ die virtuelle Verschiebung des Knotens k.

(9) Prinzip der virtuellen Kraftgrößen. Dieses Gegenprinzip besagt, dass sich eine gewünschte Größe (z. B. eine Verschiebung an einer bestimmten Stelle) durch Anwendung einer Einheitskraft an dieser Stelle leichter bestimmen lässt. Man betrachtet einen Einheitslastfall und vergleicht die resultierenden Arbeiten mit dem realen Lastfall.

(10) Zustands- und Einflusslinien.

- Zustandslinien zeigen, wie sich Größen wie Streckenkräfte N_i oder Reaktionen bei Verschiebungen ändern.
- Einflusslinien veranschaulichen, wie eine verschobene Last an einer Position die Größe an anderer Position beeinflusst (z. B. Einflusslinien der Stabkräfte oder der Reaktionen).

Praxis: Bau einer Einflusslinie durch Verschiebung einer Einheitslaststelle und Berechnung der resultierenden Größenänderung.

(11) Verformungen. Verformungen der Stabtragwerke entstehen durch axiale Dehnung der Stäbe und resultieren in Knotenverschiebungen. Vereinfachte Berechnungen nutzen:

- Virtuelle-Work-Ansatz (siehe (8)).

- Stolpersteine: statisch bestimmte oder bestimmte Unbestimmtheit (ggf. zusätzliche Gleichgewichte nötig).
- In vielen Fällen genügt eine einfache Axialdehnungs-Beziehung $\delta l_i = \frac{N_i}{EA} l_i$ für eine grobe Verformungsabschätzung, wobei E der Elastizitätsmodul und A der St abst Querschnitt ist.