

Lernzettel

Modellierung von Stabtragwerken mit Knoten-Stab-Elementen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Baustatik I

Lernzettel: Baustatik I – Modellierung von Stabtragwerken mit Knoten-Stab-Elementen

(1) Ziel und Gegenstand. In dieser Lerneinheit geht es um die Modellierung von Stabtragwerken mit Knoten-Stab-Elementen (Truss-Bauweise). Diese Elemente tragen nur Axialkräfte, Verformungen sind axialen Dehnungen der Stäbe entsprechend. Jedes Knoten-Stab-System wird durch die Geometrie der Knoten, die Richtung der Stäbe und die äußeren Einwirkungen bestimmt.

(2) Grundannahmen und Modellierungskonzept.

- Stäbe sind idealisiert als Pfeiler mit axialer Steifigkeit, keine Biege- oder Schubkräfte in den Stäben.
- Knoten sind kugelsymmetrisch verbundene Gelenke (frei drehbar), daher wirken an den Gelenken ausschließlich die Axialkräfte der umlaufenden Stäbe.
- Lagersysteme beschreiben äußere Reaktionen an den Knoten (Stützreaktionen).
- Vernachlässigt wird Eigengewicht und Dämpfung, sofern nicht explizit als Last gegeben.

(3) Geometrie, Orientierung und kinematische Größe. Für jedes Stabglied i gilt:

$$L_i = \|\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_j\|,$$
$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_j}{L_i} = \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \end{pmatrix},$$

wobei j der Endknoten und j' der andere Endknoten des Stabs i ist. Die Lage der Knoten ergibt die Freiheitsgrade:

$$u_j, v_j \quad \text{für jeden Knoten } j \text{ (x- und y-Koordinaten).}$$

(4) Grundgleichungen der Theorie I. Ordnung. An einem beliebigen Knoten j gilt das Gleichgewicht der Kräfte in Horizontal- und Vertikalrichtung. Sei m_j die Anzahl der mit dem Knoten verbundenen Stäbe. Die unbekannten Stabskräfte F_i tragen gemäß ihrer Orientierung bei:

Horizontale Kraftbalance bei Knoten j :

$$\sum_{i=1}^{m_j} F_i e_{ix} + R_{xj} = 0.$$

Vertikale Kraftbalance bei Knoten j :

$$\sum_{i=1}^{m_j} F_i e_{iy} + R_{yj} = 0.$$

Umgebende Ausgänge sind die äußeren Lagerreaktionen R_{xj}, R_{yj} . Die Unbekannten F_i und gegebenenfalls Reaktionen werden durch das gesamte Knotensystem gelöst.

(5) Aufbauprinzip, Schnittprinzip und Arbeitsprinzip.

- Aufbauprinzip: Ein Stab trägt axiale Kräfte; die Verformungen folgen der Längenänderung ΔL_i eines Stabes.
- Schnittprinzip: Ein Zwischenschnitt trennt ein Teilsystem und liefert Gleichgewichtsbedingungen am Rand (Knoten oder Untergliederung).
- Arbeitsprinzipien der Mechanik:
 - Prinzip der virtuellen Weggrößen: Bei einer zulässigen virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ gilt die Gleichung

$$\sum_j \mathbf{R}_j \cdot \delta \mathbf{u}_j = \sum_i F_i \delta L_i.$$

- Prinzip der virtuellen Kraftgrößen: Entsprechen die virtuellen Verschiebungen den virtuellen Kräften.

(6) Elastische Verbindung zwischen Dehnung und Kraft. Für einen Stab i gilt die einfache axiale Ersatzregel:

$$F_i = k_i \delta_i, \quad k_i = \frac{E_i A_i}{L_i}, \quad \delta_i = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{u}_{j'} - \mathbf{u}_j),$$

wobei $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$ die Verschiebung des Knotens j ist. Damit lassen sich die Stabskräfte in Abhängigkeit der Knotendehnungen ausdrücken.

(7) Vorgehen in der Praxis.

Bitte beachte: Im Lernzettel wird kein `enumerate` verwendet. Stattdessen folgt eine schrittweise textliche Gliederung:

- Geometrie festlegen: Knotenkoordinaten, Stabverbindungen.
- Unbekannte Kräfte der Stäbe festlegen (Vorzeichenkonvention: positive Zugkräfte).
- Gleichgewichtsbedingungen an allen Knoten formulieren (Horizontale und vertikale Komponente).
- Falls nötig: Verwendung des Stiffness-Ansatzes $F_i = k_i \delta_i$ und Knotenverschiebungen als Unbekannte lösen.
- Reaktionen an den Stützpunkten bestimmen.
- Ergebnisse interpretieren und kritisch bewerten.

(8) Beispielskizze einer Dreiecks-Tragstruktur (Dreistab-Truss). An einem Dreiecks-Tragwerk mit Stäben AB, BC, CA und Stützpunkten bei B und C liegt eine Vertikallast P am Knoten A an. Gegenüberliegende Koordinaten: $A = (0, h)$, $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$. Die Stäbe laufen von A zu B bzw. C und der Stab BC liegt horizontal. Die horizontalen und vertikalen Gleichgewichte an Knoten A lauten:

$$F_{AB} \frac{-b}{L_{AB}} + F_{AC} \frac{b}{L_{AC}} = 0,$$
$$F_{AB} \frac{-h}{L_{AB}} + F_{AC} \frac{-h}{L_{AC}} - P = 0.$$

Zusätzliche Gleichgewichte an den Stützpunkten B und C liefern die restlichen Unbekannten und Reaktionen. Dieses Gleichungssystem löst die Stabkräfte F_{AB}, F_{AC}, F_{BC} . Eine vollständige numerische Lösung erfolgt durch Angabe der Abmessungen und Lasten im konkreten Fall.

(9) Hinweise zur Lösung von typischen Aufgaben.

- Prüfe die Stabanzahl gegen Knotenanzahl: klassisch statisch bestimmt, wenn $m = 2j - 3$ in der Ebene (für gelenkig gelagerte Bauten).
- Nutze zuerst die Knoten A und B, um die Unbekannten schrittweise zu lösen (Methoden der Knoten bzw. der Schnitte).
- Achte auf Vorzeichen: Zugkraft positiv, Druck negativ.
- Verwende, wo sinnvoll, den Ansatz über $F_i = k_i \delta_i$ und verschiebe danach die Knoten, um die Reaktionen zu bestimmen.

(10) Abschluss und Reflexion. Durch die Knoten-Stab-Modellierung lassen sich Tragverhalten, verformungen und Einflussgrößen relativ einfach analysieren. Die Methoden der virtuellen Wege- und der virtuellen Kraftgrößen ermöglichen zudem die Bestimmung von Einfluss- und Verformungsgrößen sowie die Beurteilung statischer Bestimmtheit.