

Lernzettel

Herleitung der Grundgleichungen nach Theorie I. Ordnung

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Baustatik I

Lernzettel: Baustatik I - Herleitung der Grundgleichungen nach Theorie I. Ordnung

(1) Zielsetzung und Kontext. In diesem Teilabschnitt werden die Grundgleichungen der Statik in der Theorie I. Ordnung hergeleitet. Es gilt das Modell zweidimensionaler Stabtragwerke mit Gelenken (Knoten) und Stäben, bei dem Stäbe rein axiale Kräfte übertragen und Gelenke idealisiert als Scharnierpunkte aufgefasst werden. Auf dieser Grundlage lassen sich die Knoten-Gleichgewichte aufstellen, die das Tragverhalten festlegen.

(2) Grundbegriffe und Größen. - Knoten j : Verbindet mehrere Stäbe i ($i \in J(j)$). - Stab i : verbindet zwei Knoten $a(i)$ und $b(i)$. - Längenmaß L_i des Stabes i :

$$L_i = \sqrt{(x_{b(i)} - x_{a(i)})^2 + (y_{b(i)} - y_{a(i)})^2}.$$

- Orientierung des Stabes i durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{L_i} \begin{pmatrix} x_{b(i)} - x_{a(i)} \\ y_{b(i)} - y_{a(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ij} \\ \sin \theta_{ij} \end{pmatrix},$$

wobei θ_{ij} der Winkel des Stabes i zur x-Achse am Knoten j ist. - axiale Kraft des Stabes i : N_i . Sie wirkt entlang des Stabes, von einem Knoten zum anderen.

(3) Grundgleichungen am Knoten (Theorie I. Ordnung). - Betrachte einen Knoten j , der durch die Menge der benachbarten Stäbe $J(j)$ verbunden ist und äußere Lasten $\mathbf{F}_j = (F_{jx}, F_{jy})^T$ trägt.

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern die zwei Gleichungen:

$$\sum_{i \in J(j)} N_i \cos \theta_{ij} + F_{jx} = 0, \quad \sum_{i \in J(j)} N_i \sin \theta_{ij} + F_{jy} = 0.$$

(4) Ersatzgrößen und Orientierung. - Zur Berechnung der Koeffizienten N_i werden die Beiträge der benachbarten Stäbe an jedem Knoten verwendet. - Die Komponenten der Stabkräfte lassen sich auch über die Stabrichtung ausdrücken:

$$N_i \cos \theta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad N_i \sin \theta_{ij}.$$

(5) Strukturierte Formulierung der Gleichungen (systematisch). - Für jeden Knoten j ergibt sich ein zweites Gleichungspaar:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J(j)} N_i \cos \theta_{ij} &= -F_{jx}, \\ \sum_{i \in J(j)} N_i \sin \theta_{ij} &= -F_{jy}. \end{aligned}$$

- Diese Gleichungen bilden zusammen ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $\{N_i\}$ (die Stabkräfte). - Für statisch bestimmte Tragwerke ist dieses System eindeutig lösbar, wenn die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der unabhängigen Gleichungen entspricht.

(6) Orientierung der Hilfsgrößen. - Die Winkel θ_{ij} (bzw. die Komponenten $\cos \theta_{ij}, \sin \theta_{ij}$) ergeben sich aus den Geometrien der Stabverbindungen über die Koordinaten der Knoten.

$$\cos \theta_{ij} = \frac{x_{b(i)} - x_{a(i)}}{L_i}, \quad \sin \theta_{ij} = \frac{y_{b(i)} - y_{a(i)}}{L_i}.$$

(7) Aufbauprinzip, Schnittprinzip und Arbeitsprinzipien (Methodenname). - Aufbauprinzip: Zerlegung des Tragwerks in Freiheitsgrade an Knoten (Knotenfreiheitsobjekte) und Analyse der Knotengleichgewichte. - Schnittprinzip: Freischneiden eines Teils des Tragwerks, um innere Kräfte in einem Schnitt zu bestimmen. - Arbeitsprinzipien der Mechanik: - Prinzip der virtuellen Weggrößen (PWG): Betrachte kleine virtuelle Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$, die das Gleichgewicht erhalten, um Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen herzustellen. - Prinzip der virtuellen Kraftgrößen (PVG): Wechsel der Perspektive, Kräfte ändern sich entsprechend den virtuellen Weggrößen. - Ziel beider Prinzipien ist die Bestimmung von Zustands- und Einflusslinien sowie Verformungen.

(8) Einflusslinien, Zustandsgrößen und Verformungen (Ausblick). - Einflusslinien lassen sich aus PWG ableiten, um die Wirkung von äußeren Lasten auf Verschiebungen bzw. Kräfte in Stäben zu quantifizieren. - Mit den Grundgleichungen lassen sich Zustandsgrößen (Zug/Nut) der Stäbe sowie ggf. Verformungen des Tragwerks berechnen. - Ziel der Methode ist eine einfache, robuste Berechnung statisch bestimmter Stabtragwerke durch Knotengleichgewichte und Geometrie.

(9) Bemerkung zur Praxis. - In der Praxis werden zunächst die Geometrie des Tragwerks und die äußeren Lasten festgelegt. - Anschließend werden die Gleichungen der Knotengleichgewichte erstellt (eine Gleichung pro Richtung pro Knoten). - Die resultierende lineare Gleichungssystem-Lösung liefert die Stabkräfte N_i und damit das Tragverhalten.