

Lernzettel

Prinzip der virtuellen Weggrößen:
Formulierungen, Aufgaben und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Baustatik I

Lernzettel: Baustatik I**Prinzip der virtuellen Weggrößen: Formulierungen, Aufgaben und Anwendungen****(1) Formulierungen des Prinzips der virtuellen Weggrößen.**

Grundidee. Für ein mechanisches System im Gleichgewicht gelten für alle zulässigen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_i$ die virtuellen Arbeiten:

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Zu berücksichtigende Variablen. Die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_i$ müssen kompatibel mit den Gelenken, Lagerungen und dem Aufbau des Tragwerks gewählt werden. In Gelenk-Stabstrukturen gilt insbesondere, dass nur zulässige Bewegungen berücksichtigt werden.

(i) Allgemeine Gleichgewichtsform. Für ein Gesamtsystem gilt

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{für alle zulässigen } \delta \mathbf{r}_i.$$

(ii) Anwendung in Stabtragwerken. In starr-gelenkigen Stabgraphen ergibt sich die virtuelle Arbeit aus den äußeren Kräften und den Reaktionen. Die Gleichung

$$\delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} = 0$$

führt zusammen mit den Kompatibilitätsbedingungen zu Gleichungen in den Unbekannten (z. B. Stabkräfte). In vielen Lehrbüchern wird stattdessen direkt $\delta W_{\text{ext}} = 0$ genutzt, wobei δW_{ext} die Arbeiten der äußeren Kräfte über die zulässige virtuelle Verschiebung umfasst.

(iii) Unit-Load-Form (Spezialfall – Durchbiegung). Für eine Verschiebung an einer Referenzstelle x_0 gilt der Unit-Load-Satz:

$$\delta = \int_0^L \frac{M(x) M_u(x)}{EI} dx,$$

wobei - $M(x)$ der Momentenverlauf infolge der tatsächlichen Lasten ist, - $M_u(x)$ der Momentenverlauf durch eine Einheitslast an der Stelle x_0 ist, - E der Elastizitätsmodul, I das Flächenmomentanhebungsmaß ist.

(iv) Vorteil der virtuellen Weggrößen. Mit diesem Prinzip lassen sich Verformungen, Einflusslinien und Verschiebungen in Stabtragwerken ohne vollständige direkte Deformationsrechnung bestimmen, indem man virtuelle Verschiebungen gezielt wählt.

(2) Aufgaben und Beispiele (Anwendung des Prinzips).

Beispiel 1 – Durchbiegung eines einfach unterstützten Balkens (zentraler Punktlast). Gegeben: Balken mit Länge L , Elastizitätsmodul E und Flächenträgheitsmoment I ; eine Punktlast P wirkt in der Mitte, $x_0 = \frac{L}{2}$. Gesucht: Durchbiegung δ am Punkt x_0 mithilfe der Unit-Load-Methode.

Lösungsskizze.

- Reaktionskräfte bei der realen Last:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}.$$

- Momentenverlauf $M(x)$ aus der realen Last:

$$M(x) = \begin{cases} R_A x = \frac{P}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ R_B (L - x) = \frac{P}{2}(L - x), & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

- Momentenverlauf $M_u(x)$ durch eine Einheitslast am $x_0 = \frac{L}{2}$:

$$M_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{1}{2}(L - x), & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

- Unit-Load-Integration:

$$\delta = \int_0^L \frac{M(x) M_u(x)}{EI} dx = \frac{P}{4EI} \int_0^{L/2} x^2 dx + \frac{P}{4EI} \int_{L/2}^L (L - x)^2 dx = \frac{PL^3}{48 EI}.$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\delta_{x_0=L/2} = \frac{PL^3}{48 EI}}.$$

Beispiel 2 – Einflusslinien für statische Größen (Kurzer Überblick). Die Einflusslinie einer Größe (z. B. Durchbiegung an x_0) beschreibt, wie sich diese Größe ändert, wenn eine Lastposition des Einheitslasts bewegt wird. Mit der Unit-Load-Methode lassen sich Einflusslinien durch Verschieben der Einheitslast berechnen, da $M_u(x)$ dann entsprechend verschoben wird. Solche Linien helfen bei der schnellen Bestimmung von Verformungen bei beliebigen Lastpositionen.

Beispiel 3 – Einfluss von Verschiebungen auf Stablängen (Stabwerk). In einem kleinen Dreiecksrahmen mit drei Stäben lässt sich die axiale Deformation eines Stabes AB durch das virtuelle Weggrößenprinzip bestimmen, indem eine zulässige virtuelle Verschiebung am Knoten eingeführt wird und die resultierenden virtuellen Arbeiten der Stabkräfte berechnet werden. Praktisch erfolgt dies häufig durch die Wahl einer Einheitverformung an der gewünschten Stelle und anschließende Summation der virtuellen Arbeiten der zugrunde liegenden Stabskräfte.

Hinweise zur Praxis.

- Wähle immer eine zulässige, kompatible virtuelle Verschiebung.

- Nutze die Unit-Load-Form, wenn Du Verformungen direkt ermitteln willst.
- Prüfe Einheiten, insbesondere E in N/m^2 , I in m^4 , L in m .

(3) Fazit und Anwendungen in der Baustatik I. Das Prinzip der virtuellen Weggrößen ist das zentrale Werkzeug zur Bestimmung von Verformungen, Einflusslinien und Zustandsgrößen in statisch bestimmten und statisch wenig bestimmten Stabtragwerken. Es ermöglicht, statt direkter Deformationsberechnung oft kompakte, lösungsorientierte Schrittfolgen zu verwenden, insbesondere bei der Unit-Load-Methode und der Bestimmung von Einflusslinien.