

Lernzettel

Poisson- und Dirichlet-Formeln,
Randwertprobleme im Einheitskreis

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025



Zielorientierte Lerninhalte, kostenlos!
Entdecke zugeschnittene Materialien für deine Kurse:

<https://study.AllWeCanLearn.com>

Analysis III für Ingenieure

Lernzettel: Poisson- und Dirichlet-Formeln, Randwertprobleme im Einheitskreis

(1) Randwertproblem im Einheitskreis. Gegeben sei eine stetige Randfunktion $g : |z| = 1 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Gesucht ist eine harmonische Funktion u im offenen Einheitskreis $D = \{z : |z| < 1\}$ mit der Randbedingung

$$u|_{|z|=1} = g.$$

Formulierung: Finde $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D \quad \text{und} \quad u|_{|z|=1} = g.$$

(2) Poisson-Formel (Randwertlösung im Einheitskreis). Für $0 \leq r < 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt die Poisson-Integralformel:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) g(\phi) d\phi,$$

mit dem Poisson-Kernfunktion

$$P_r(\varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}.$$

(3) Dirichlet-Formeln (Dirichlet-Kern und Fourier-Summen). Dirichlet-Kern:

$$D_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^n e^{ik\varphi} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k\varphi).$$

(3') Dirichlet-Partial-Funktionen (Fourier-Summen). Die n-te partielle Fourier-Summe von f ist gegeben durch

$$s_n f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) D_n(\theta - \phi) d\phi.$$

(4) Zusammenhang zwischen Poisson- und Dirichlet-Formeln. - Die Poisson-Integralformel liefert die harmonische Erweiterung einer beliebigen Randfunktion g ins Innere des Disk.

- Die Dirichlet-Operatoren liefern die Fourier-Partialschritte der Randfunktion. Insbesondere konvergiert $s_n g$ gegen g unter geeigneten Regularitätsannahmen, während der Poisson-Operator die harmonische Erweiterung liefert.

(5) Wichtige Eigenschaften. - Eindeutigkeit: Das Randwertproblem im Einheitskreis besitzt eine eindeutige harmonische Lösung, falls g stetig ist. - Stetigkeit bis zum Rand: Falls $g \in C(\partial D)$, dann konvergiert der Poisson-Integralwert gegen g auf ∂D . - Maximumprinzip: Eine harmonische Funktion erreicht ihr Maximum/Minimum im Rand.

(6) Beispiele (skizziert). - Sei $g(\phi) = \cos(k\phi)$ mit $k \geq 0$. Dann ist

$$u(r, \theta) = r^k \cos(k\theta),$$

eine harmonische Erweiterung, die die Randbedingungen erfüllt.

- Sei $g(\phi) = 1$ konstant. Dann ist

$$u(r, \theta) = 1 \quad (0 \leq r < 1),$$

die triviale harmonische Erweiterung.

(7) Notation und Sinne. - $D = \{z : |z| < 1\}$ = Einheitskreis. - $z = re^{i\theta}$ in Polarform. - $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ = Laplace-Operator.